

Demoucron, Malgrange, Pertuiset

Algorytm sprawdzający planarność grafu

Szymon Bargłowski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

1 kwietnia 2009

Spis treści:

- 1 WPROWADZENIE
 - Intuicja
 - Fragment
 - a - ścieżka
 - Ściana dopuszczalna
 - Fragmenty rywalizujące
- 2 ALGORYTM
 - Pseudokod
 - Złożoność czasowa
- 3 DOWÓD POPRAWNOŚCI
 - Lematy
 - Dowód
- 4 BIBLIOGRAFIA

Intuicja

Prezentowany algorytm jest procedurą iteracyjną. W każdym kroku decydujemy w którą ścianę włożymy wybrany fragment grafu. W ten sposób otrzymujemy za każdym razem coraz bardziej rozbudowane częściowe włożenie grafu w płaszczyznę.

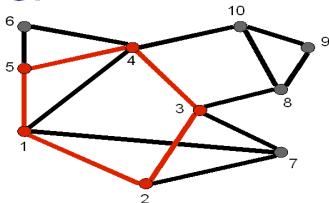
Dla danego grafu $G=(V,E)$ oraz jego dowolnego podgrafu $G'=(V',E')$ przez **fragment** rozumiemy:

2 możliwości:

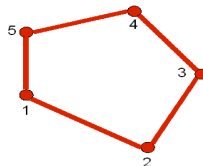
- pojedynczą krawędź $k \in E \setminus E'$ taką, że $v,w \in V'$, ALBO
- sumę pewnej spójnej składowej podgrafu G indukowanego przez zbiór wierzchołków $V \setminus V'$ oraz krawędzi łączących ją z G' .

Przykład grafu G , podgrafu G' oraz fragmentów:

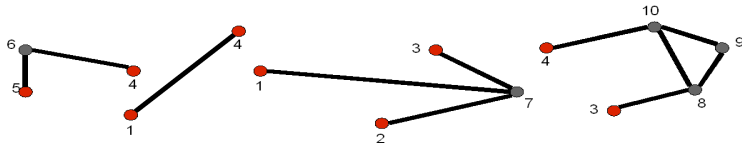
G:



G':



4 FRAGMENTY :



Rysunek: Rozkład grafu na podgraf i fragmenty

Zdefiniujmy kolejne pojęcia:

Wierzchołek kontaktowy

Wierzchołkami kontaktowymi nazywamy wierzchołki wspólne fragmentów i grafu G' , względem którego te fragmenty powstały.

Zdefiniujemy kolejne pojęcia:

Wierzchołek kontaktowy

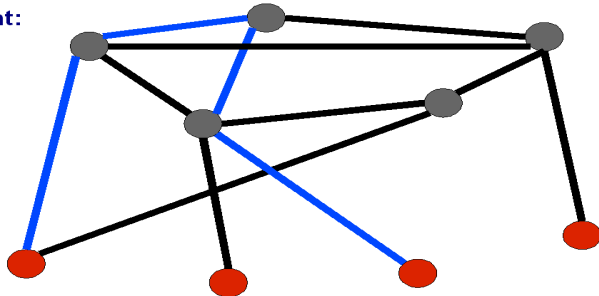
Wierzchołkami kontaktowymi nazywamy wierzchołki wspólne fragmentów i grafu G' , względem którego te fragmenty powstały.

α - ścieżka

α - ścieżką nazwiemy dowolną ścieżkę w obrębie danego fragmentu zawierającą dokładnie 2 wierzchołki kontaktowe będące jej końcami.

Przykład fragmentu i α - ścieżki:

Fragment:



Wierzchołek kontaktowy



α - ścieżka

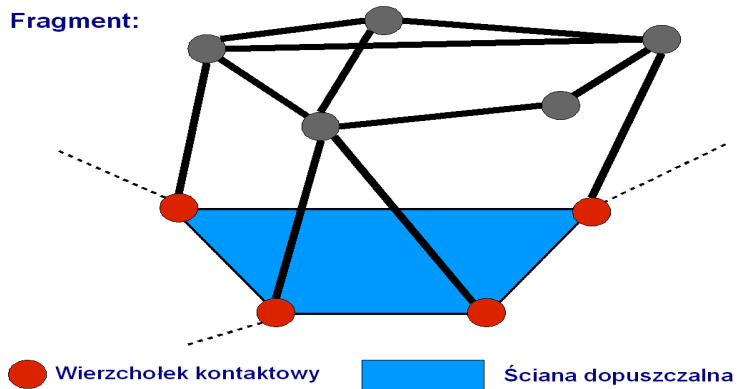
Rysunek: Fragment i α - ścieżka

Definicja

Dla danego częściowego włożenia G' grafu G w płaszczyznę oraz wybranego fragmentu f , ścianą dopuszczalną nazwiemy taką ścianę G' , która zawiera wszystkie wierzchołki kontaktowe fragmentu f .

Przykład fragmentu i jego ściany dopuszczalnej:

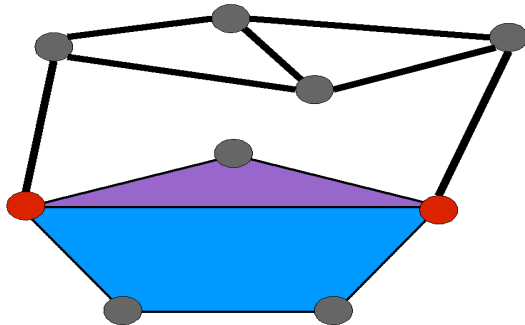
Fragment:



Rysunek: Fragment z jedną ścianą dopuszczalną.

Kolejny przykład:

Fragment:



Wierzchołek kontaktowy



Ściany dopuszczalne

Rysunek: Fragment z dwiema ścianami dopuszczalnymi.

Oznaczenie:

Dla fragmentu S oznaczmy przez $F(S)$ zbiór wszystkich dopuszczalnych ścian S (dla ustalonego częściowego włożenia G' grafu G w płaszczyznę).

Definicja:

Dwa fragmenty S oraz T rywalizują ze sobą wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$
- $\forall f \in F(S) \cap F(T)$ istnieją α - ścieżki $P1 \subset S$ oraz $P2 \subset T$ takie, że $P1$ i $P2$ nie mogą być jednocześnie włożone w ścianę f . (UWAGA: można tutaj równoważnie użyć $\exists$ zamiast $\forall$)

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- 1 Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- 2 Wyznacz wszystkie ściany G' .
- 3 Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- 4 Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- 5 Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- 6 Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- 7 Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- 8 Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- 9 Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Dane wejściowe: graf G

Algorytm:

- ❶ Jako podgraf G' grafu G wybierz dowolny cykl.
- ❷ Wyznacz wszystkie ściany G' .
- ❸ Oblicz F - zbiór wszystkich fragmentów G ze względu na G'
- ❹ Jeśli $F = \emptyset$ to znaczy, że graf G' jest włożeniem grafu G w płaszczyznę; G jest planarny, KONIEC.
- ❺ Wyznacz dopuszczalne ściany dla wszystkich fragmentów $\in F$.
- ❻ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ bez dopuszczalnej ściany, to graf G nie jest planarny, KONIEC.
- ❼ Jeśli istnieje fragment $f \in F$ z tylko jedną ścianą dopuszczalną, przejdź do punktu 9.
- ❽ Wybierz fragment $f \in F$ (z więcej niż jedną ścianą dopuszczalną).
- ❾ Wyznacz dowolną α - ścieżkę w f i włóż ją w dowolną dopuszczalną ścianę fragmentu f . Przejdź do punktu 2.

Złożoność czasowa

Przedstawiony algorytm działa w czasie $O(|V|^2)$:

- W każdym obrocie głównej pętli dodajemy jedną ścianę do powiększanego, częściowego włożenia G' grafu G w płaszczyznę.
- Obrotów głównej pętli jest $O(|E| - |V| + 1)$ (tw. Eulera)
- W grafach planarnych liczba krawędzi jest rzędu $O(|V|)$
- Wyznaczanie fragmentów, ścian dopuszczalnych oraz wkładanie α -ścieżki w ścianę jest wykonalne w czasie $O(|V|)$.

Lemat1: O dopuszczalnych ścianach rywalizujących komponentów

Jeśli dla dwóch rywalizujących fragmentów S i T zachodzi $|F(S)| \geq 2$ oraz $|F(T)| \geq 2$, to wtedy $F(S) = F(T)$ oraz $|F(S)| = |F(T)| = 2$.

Lemat1: O dopuszczalnych ścianach rywalizujących komponentów

Jeśli dla dwóch rywalizujących fragmentów S i T zachodzi $|F(S)| \geq 2$ oraz $|F(T)| \geq 2$, to wtedy $F(S) = F(T)$ oraz $|F(S)| = |F(T)| = 2$.

Definicja: Graf fragmentów

Dla ustalonego częściowego włożenia G' grafu G w płaszczyznę grafem fragmentów nazywamy następujący graf $S(G') = (V, E)$:

- V = zbiór fragmentów G ze względu na G'
- $E = \{ (f_1, f_2) : f_1 \text{ i } f_2 \text{ są fragmentami rywalizującymi} \}$

Lemat2: O dwudzielności grafu fragmentów

Jeśli przy ustalonym częściowym włożeniu G' grafu G w płaszczyznę zachodzi $|F(S)| \geq 2$ dla wszystkich fragmentów S , to graf fragmentów jest grafem dwudzielnym.

Dowód

Plan dowodu poprawności omawianego algorytmu:

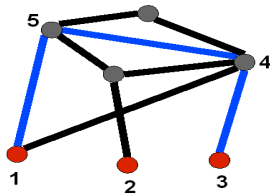
- 1 Jeśli algorytm kończy się w punkcie (4), to graf jest planarny.
- 2 Jeśli graf G jest planarny, to algorytm znajduje włożenie grafu G w płaszczyznę (algorytm kończy się w punkcie (4)).

Dowód, część 1

Wiemy, że własność planarności jest zamknięta na branie minorów grafów, a w szczególności na ściąganie ścieżek do jednej krawędzi. Algorytm w każdym kroku głównej pętli wkłada wybraną α - ścieżkę z fragmentu S w pewną ścianę $\in F(S)$. Zauważmy, że można przeprowadzić dokładną symulację tego procesu i kolejne włożenia ścieżek w ściany odwzorowywać na płaszczyźnie - dokładając najwyżej w razie potrzeby kilka sztucznych wierzchołków na krawędziach α - ścieżki, aby dało się ją poprowadzić przez ścianę nie przecinając żadnych krawędzi. Tak więc jeśli algorytm kończy się w punkcie (4), to kończymy symulację mając włożony w płaszczyznę graf, którego minorem jest graf wyjściowy G . Zatem G jest również planarny. $\square$

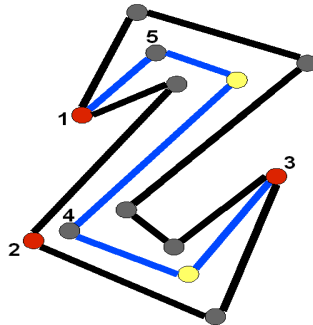
Przykład z dodawaniem sztucznych wierzchołków:

Fragment:



- Wierzchołki sztuczne
- Wierzchołki kontaktowe
- α - ścieżka

Ściana dopuszczalna fragmentu:



Rysunek: Ścieżka z dwoma dodanymi sztucznymi wierzchołkami.

Dowód, część 2

Udowodnijmy, że jeśli graf G jest planarny, to kolejne iteracje algorytmu dają częściowe włożenia grafu G w płaszczyznę. Każde takie częściowe włożenie może być otrzymane z pewnego włożenia grafu G poprzez usuwanie wierzchołków i krawędzi. Ostatecznie algorytm kończy się w punkcie (4).

Indukcja po n - numerze iteracji:

$n = 0$:

Wybrany na początku dowolny cykl G' jest częściowym włożeniem grafu G w płaszczyznę oraz może być otrzymany poprzez usunięcie odpowiednich wierzchołków i krawędzi z dowolnego włożenia G^* grafu G w płaszczyznę.

Dowód, część 2 c.d.

$n > 0$: Mamy częściowe włożenie G' grafu G , które może zostać uzyskane poprzez usuwanie wierzchołków oraz krawędzi z pewnego włożenia G^* grafu G w płaszczyznę.

Rozważmy 2 przypadki:

Przypadek 1

Względem G' istnieje fragment S taki, że $F(S) = \{f\}$. Wtedy oznacza to, że w G^* fragment S jest wewnątrz swojej jedynej dopuszczalnej ściany f . Wybieramy dowolną α - ścieżkę $\subset S$ i wkładamy ją w ścianę f . Otrzymujemy częściowe włożenie grafu G , które może być osiągnięte z G^* poprzez usuwanie krawędzi i wierzchołków.

Dowód, część 2 c.d.

Przypadek 2

Wszystkie fragmenty względem G' mają co najmniej 2 dopuszczalne ściany. Wybieramy dowolny fragment T , pewną α - ścieżkę $\subset T$, a następnie wkładamy ją w jedną ze ścian $F(T)$. Możliwe są 2 sytuacje:

- Włożyliśmy ścieżkę w tą samą ścianę, w której T znajduje się w G^* (wtedy mamy nowe częściowe włożenie G' grafu G , które można uzyskać z G^*)
- Włożyliśmy ścieżkę w inną ścianę $\mathbf{a} \in F(T)$. Jeśli T nie rywalizuje z innymi fragmentami, to nadal mamy częściowe włożenie grafu G osiągalne z włożenia $G^{**} = (G^* \text{ z fragmentem } T \text{ przełożonym do ściany } \mathbf{a})$. Jeśli istnieją fragmenty rywalizujące z T , to graf $S(T)$ jest dwudzielny (Lemat1), a każdy fragment jego spójnej składowej zawierającej T ma dokładnie 2, te same (Lemat2) ściany dopuszczalne $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. Fragmentom z tej spójnej składowej zamieniamy w G^* ściany z $\mathbf{a}$ na $\mathbf{b}$ i z $\mathbf{b}$ na $\mathbf{a}$ otrzymując G^{**} , z którego można uzyskać nasze nowe częściowe włożenie G' . $\square$

Bibliografia:

Dokument i prezentacja:

- <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/EWS/demoucron.pdf>
- <http://www.utdallas.edu/nkk071000/combinatorics/planarity.ppt>