O skojarzeniach bez ścieżek powiększających

Jakub Łącki

5 marca 2009

Doskonałe skojarzenia w grafach dwudzielnych 3-regularnych

- istnieje algorytm liniowy wyznaczania doskonałego skojarzenia w grafie dwudzielnym
- wymaga tylko lokalnych operacji
- znajduje doskonałe skojarzenia w grafach dwudzielnych *prawie* 3-regularnych
- graf *prawie* 3-regularny, to graf 3-regularny, z którego usunięto jedną krawędź

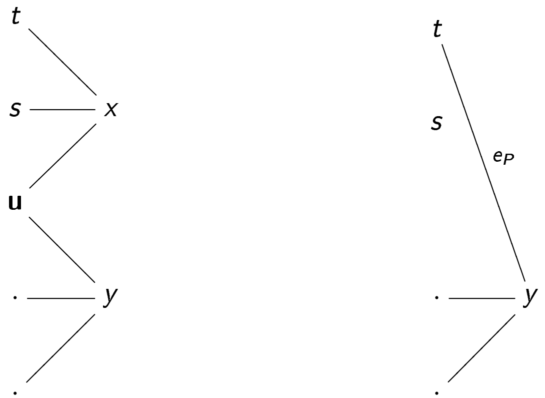
Algorytm, c.d.

Niech u i v to wierzchołki o stopniu 2.
Przypadki proste:

- u i v są połączone krawędzią
  można dodać tę krawędź do skojarzenia i usunąć z grafu u i v
- obydwie krawędzie z u prowadzą do tego samego sąsiada
  wybieramy dowolną krawędź do skojarzenia i usuwamy obydwa wierzchołki z grafu

Algorytm, c.d.

Przypadek (troszkę) trudniejszy:
u ma dwóch sąsiadów o stopniu 3.



Algorytm, c.d.

- usuwamy u oraz x, wstawiamy krawędź e_P
- powstały graf jest prawie 3-regularny
- posiada o dwa wierzchołki mniej
- można rekurencyjnie znaleźć doskonałe skojarzenie
- jeśli e_P jest skojarzona to w oryginalnym grafie skojarzone są tx i uy
- w przeciwnym przypadku skojarzona jest ux

Twierdzenie (Voorhoeve)

Każdy graf dwudzielny 3-regularny o 2n wierzchołkach posiada co najmniej $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ doskonałych skojarzeń.

Dowód

- wystarczy pokazać, że teza zachodzi dla grafów prawie 3-regularnych
- dowód przebiega indukcyjnie ze względu na n
- dla $n = 1$ mamy $3 \geq \frac{4}{3}$ skojarzeń

Krok indukcyjny

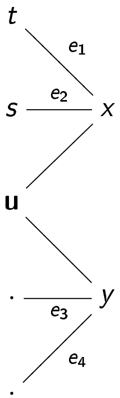
Niech u i v to wierzchołki o stopniu 2.
Przypadki proste:

- obydwie krawędzie z u prowadzą do tego samego sąsiada
  możemy wybrać dowolną z tych krawędzi do skojarzenia,
  $2(\frac{4}{3})^{n-1} \geq (\frac{4}{3})^n$
- u i v są połączone jedną krawędzią
  odkładamy na później

Krok indukcyjny c.d.

Przypadek trzeci:
u ma dwóch sąsiadów o stopniu 3.

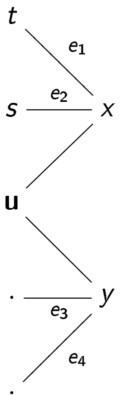
- w każdym doskonałym skojarzeniu będzie *dokładnie* jedna krawędź spośród e_1, e_2, e_3, e_4
- w grafie powstałym po usunięciu krawędzi e_i jest co najmniej $(\frac{4}{3})^{n-1}$ doskonałych skojarzeń



Krok indukcyjny c.d.

Przypadek trzeci:
u ma dwóch sąsiadów o stopniu 3.

- Niech G_i to graf bez krawędzi e_i, a $\Pi(G_i)$ to ilość skojarzeń w grafie G_i
- Doskonałe skojarzenia w G_1 można podzielić na trzy grupy: skojarzenia z krawędzią e_2, e_3 i e_4
- Zatem zachodzi $\Pi(G_1) + \Pi(G_2) + \Pi(G_3) + \Pi(G_4) = 3\Pi(G)$



Krok indukcyjny c.d.

Mamy zatem:

1. $\Pi(G_i) \geq (\frac{4}{3})^{n-1}$
2. $\Pi(G_1) + \Pi(G_2) + \Pi(G_3) + \Pi(G_4) = 3\Pi(G)$

a stąd:

$$\Pi(G) = \frac{1}{3}(\Pi(G_1) + \Pi(G_2) + \Pi(G_3) + \Pi(G_4)) \geq (\frac{4}{3})^n$$

$\square$

Ostatni przypadek

Pozostaje rozpatrzyć przypadek, w którym wierzchołki stopnia dwa są połączone jedną krawędzią.

- w takim grafie ścieżkę (x, u, v, y) można zamienić na jedną krawędź
- powstaje graf 3-regularny
- każdemu skojarzeniu w takim grafie odpowiada skojarzenie w oryginalnym grafie
- wystarczy pokazać, że w grafie 3-regularnym jest co najmniej $(\frac{4}{3})^{n+1}$ doskonałych skojarzeń
- dowód podobny do poprzedniego przypadku

Dowód zakończony

W ten sposób udowodniliśmy:

Twierdzenie (Voorhoeve)

Każdy graf dwudzielny 3-regularny o $2n$ wierzchołkach posiada co najmniej $(\frac{4}{3})^n$ doskonałych skojarzeń.

Okazuje się, że stała $\frac{4}{3}$ jest największą możliwą.

Dowód

Spostrzeżenie 1

Ilość rozmieszczeń kn ponumerowanych kul w n pudełkach, tak by w każdym pudełku było k kul wynosi $\frac{(kn)!}{k!^n}$.

Dowód

Spostrzeżenie 1

Ilość rozmieszczeń kn ponumerowanych kul w n pudełkach, tak by w każdym pudełku było k kul wynosi $\frac{(kn)!}{k!^n}$.

Spostrzeżenie 2

Ilość dwudzielnych grafów 3-regularnych o ponumerowanych krawędziach i 2n wierzchołkach to $(\frac{(3n)!}{3!^n})^2$.

Kolejne spostrzeżenia

Dla ustalonego, n-elementowego podzbioru krawędzi, ilość grafów w których zbiór ten jest doskonałym skojarzeniem to: $(n!\frac{(2n)!}{2^n})^2$

n-elementowy podzbiór krawędzi można wybrać na $\binom{3n}{n}$ sposobów.

Kolejne spostrzeżenia

Dla ustalonego, n-elementowego podzbioru krawędzi, ilość grafów w których zbiór ten jest doskonałym skojarzeniem to: $(n!\frac{(2n)!}{2^n})^2$

n-elementowy podzbiór krawędzi można wybrać na $\binom{3n}{n}$ sposobów.

Zatem ilość grafów o 2n wierzchołkach z ustalonym doskonałym skojarzeniem to:
$\binom{3n}{n}(n!\frac{(2n)!}{2^n})^2$

Obliczenia

Niech α to największa taka stała, że każdy 3-regularny graf dwudzielny posiada co najmniej α^n doskonałych skojarzeń. Wiemy, że $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

Obliczenia

Niech α to największa taka stała, że każdy 3-regularny graf dwudzielny posiada co najmniej α^n doskonałych skojarzeń. Wiemy, że $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

$$\alpha^n \left(\frac{(3n)!}{3!^n}\right)^2 \leq \binom{3n}{n} \left(n! \frac{(2n)!}{2^n}\right)^2$$

Obliczenia

Niech α to największa taka stała, że każdy 3-regularny graf dwudzielny posiada co najmniej α^n doskonałych skojarzeń. Wiemy, że $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

$$\alpha^n \left(\frac{(3n)!}{3!^n}\right)^2 \leq \binom{3n}{n}\left(n!\frac{(2n)!}{2^n}\right)^2$$

$$\alpha^n \leq \binom{3n}{n}\left(n!\frac{(2n)!}{2^n}\frac{3!^n}{(3n)!}\right)^2$$

Obliczenia

Niech α to największa taka stała, że każdy 3-regularny graf dwudzielny posiada co najmniej α^n doskonałych skojarzeń. Wiemy, że $\alpha \geq \frac{4}{3}$.

$$\alpha^n \left(\frac{(3n)!}{3!^n}\right)^2 \leq \binom{3n}{n} \left(n! \frac{(2n)!}{2^n}\right)^2$$

$$\alpha^n \leq \binom{3n}{n} \left(n! \frac{(2n)!}{2^n} \frac{3!^n}{(3n)!}\right)^2$$

$$\alpha \leq \sqrt[n]{\binom{3n}{n} \left(n! \frac{(2n)!}{2^n} \frac{3!^n}{(3n)!}\right)^2} = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!(2n)!} \left(\frac{n!(2n)!}{(3n)!}\right)^2 \left(\frac{3!^n}{2^n}\right)^2} =$$
$$= \sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!} \left(\frac{3!^n}{2^n}\right)^2} = 9 \sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}}$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

$$9\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}}$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$$

$$9\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} \approx 9\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\Pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}(\frac{3n}{e})^{3n}}} =$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$$

$$9\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} \approx 9\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\Pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}(\frac{3n}{e})^{3n}}} =$$

$$= 9\frac{\frac{n}{e}(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{3n}{e})^3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}}$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$$

$$9\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} \approx 9\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\Pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}(\frac{3n}{e})^{3n}}} =$$

$$= 9\frac{\frac{n}{e}(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{3n}{e})^3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}}$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$$

$$9\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} \approx 9\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\Pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}(\frac{3n}{e})^{3n}}} =$$

$$= 9\frac{\frac{n}{e}(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{3n}{e})^3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{3}$$

Obliczenia c.d.

Wzór Stirlinga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$$

$$9\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(3n)!}} \approx 9\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\Pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}(\frac{3n}{e})^{3n}}} =$$

$$= 9\frac{\frac{n}{e}(\frac{2n}{e})^2}{(\frac{3n}{e})^3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\Pi n}\sqrt{2\Pi 2n}}{\sqrt{2\Pi 3n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{3} \qquad \square$$

Macierz Tuttego

Macierz Tuttego

Macierzą Tuttego dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ nazywamy:

$$[T_G]_{i,j} = \begin{cases} x_{ij} & (i,j) \in E, i < j \\ -x_{ji} & (i,j) \in E, i > j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Macierz Tuttego

Macierz Tuttego

Macierzą Tuttego dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ nazywamy:

$$[T_G]_{i,j} = \begin{cases} x_{ij} & (i,j) \in E, i < j \\ -x_{ji} & (i,j) \in E, i > j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Twierdzenie (Tutte, 1947)

$det T_G \not\equiv 0$ wtw. w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie.

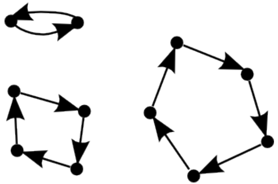
Wyznacznik — interpretacja

$$det T_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

- każdemu składnikowi sumy odpowiada wybór n krawędzi z grafu
- każdą krawędź można przyporządkować do wierzchołka (skierować)
- każdy wierzchołek ma stopień wejściowy i wyjściowy 1
- zatem taki wybór krawędzi tworzy *pokrycie cyklowe* grafu

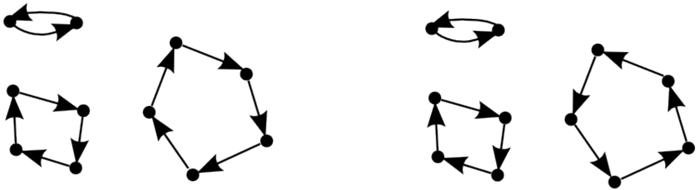
Pokrycie cyklowe a skojarzenie

1. jeśli w grafie istnieje doskonałe skojarzenie, to w pewnym pokryciu cyklowym wszystkie cykle są parzystej długości
2. jeśli w grafie nie istnieje doskonałe skojarzenie, to w każdym pokryciu cyklowym istnieje cykl nieparzystej długości



$$detT_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

Kluczowy fakt:
W powyższej sumie, składniki odpowiadające pokryciom cyklowym, w których pewien cykl ma nieparzystą długość, "zjadają się"



$$det T_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

1. dla każdego pokrycia z cyklem nieparzystej długości istnieje pokrycie, w którym ten cykl jest skierowany w przeciwnym kierunku
2. niech odpowiadające im iloczyny $\prod_{i=1}^{n} t_{i,\sigma(i)}$ to C i C'
3. czym się od siebie różnią C i C'?
4. składają się z takich samych krawędzi, zatem w C i C' są te same zmienne
5. zmienne odpowiadające krawędziom na cyklu brane są z przeciwnymi znakami
6. cykl ma nieparzystą długość
7. czyli $C = -C'$

Pozostaje pokazać, że znaki permutacji odpowiadających C i C' są przeciwne

1. permutacje te wyglądają tak samo jak odpowiadające im pokrycia cyklowe
2. zatem ich rozkład na cykle jest bardzo podobny — różną się jedynie zwrotem jednego cyklu
3. znak permutacji jest funkcją długości cykli
4. zatem znaki tych permutacji są równe

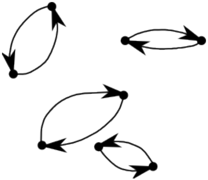
Czyli, dla grafu, w którym nie ma doskonałego skojarzenia, $det T_G \equiv 0$.

Dowód w drugą stronę

Jeśli w grafie istnieje doskonałe skojarzenie, to odpowiadające mu składniki sumy:

$$detT_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

są iloczynami kwadratów zmiennych.



Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

Twierdzenie (Tutte, 1947)

$detT_G \neq 0$ wtw. w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie.

Obliczanie wyznacznika

Jak policzyć $det T_G$?

- obliczenie przy użyciu eliminacji Gaussa daje algorytm wykładniczy
- nie trzeba obliczać tego wyznacznika, wystarczy sprawdzić czy jest on $\equiv 0$
- można wylosować wartości $x_{i,j}$ i sprawdzić wartość wyznacznika
- wyznacznik to wielomian wielu zmiennych stopnia n
- w przypadku wielomianów jednej zmiennej, taki wielomian ma co najwyżej n zer
- okazuje się, że dla wielomianów wielu zmiennych jest podobnie

Obliczanie wyznacznika c.d.

Fakt

Niech p będzie liczbą pierwszą oraz W wielomianem m zmiennych stopnia $n > 0$. Wówczas ilość takich $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{Z}_p^m$, że $W(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ nie przekracza $\frac{nm}{p} p^m$.

Dowód: łatwa indukcja.

Doskonałe skojarzenie vs najliczniejsze skojarzenie

Za pomocą dowolnego algorytmu sprawdzania, czy w grafie istnieje doskonałe skojarzenie da się obliczyć rozmiar najliczniejszego skojarzenia. Zachodzi prosty fakt:

Fakt

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, zaś G_{+k} grafem G, do którego dołożono k wierzchołków połączonych z każdym wierzchołkiem G.

Wówczas, w G_{+k} istnieje doskonałe skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy w G istnieje skojarzenie liczności $\frac{n-k}{2}$.

Wyznaczanie najliczniejszego skojarzenia

- kolejno usuwamy krawędzie z grafu
- po każdym usunięciu sprawdzamy rozmiar najliczniejszego skojarzenia
- jeśli rozmiar najliczniejszego skojarzenia się zmniejszył, to znaczy, że usunięta krawędź należy do każdego najliczniejszego skojarzenia w tym grafie
- w takim przypadku należy ją przywrócić
- potrzeba więc $O(m\ logn)$ wywołań procedury sprawdzającej istnieje doskonałego skojarzenia

Bibliografia

- Matching, Edge-Colouring, and Dimers, Alexander Schrijver, *WG 2003*
- Matching is as easy as matrix Inversion, K. Mulmuley, Umesh V. Vazirani, Vijay V. Vazirani, *Combinatorica 7, 1987*
- Probabilistic algorithms for verification of polynomial identities, *Journal of the ACM, 1980*