O skojarzeniach bez ścieżek powiększających część II

Jakub Łącki

12 marca 2009

1 Wstęp

2 Istnienie doskonałego skojarzenia
- Twierdzenie Tuttego
- Obliczanie wyznacznika macierzy Tuttego
- Doskonałe skojarzenie vs najliczniejsze skojarzenie

3 Zliczanie doskonałych skojarzeń
- Liczba doskonałych skojarzeń w grafach planarnych

Macierz Tuttego

Macierz Tuttego

Macierzą Tuttego dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ nazywamy:

$$[T_G]_{i,j} = \begin{cases} x_{ij} & (i,j) \in E, i < j \\ -x_{ji} & (i,j) \in E, i > j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Macierz Tuttego

Macierz Tuttego

Macierzą Tuttego dla grafu nieskierowanego $G = (V, E)$ nazywamy:

$$[T_G]_{i,j} = \begin{cases} x_{ij} & (i,j) \in E, i < j \\ -x_{ji} & (i,j) \in E, i > j \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

Twierdzenie (Tutte, 1947)

$det T_G \not\equiv 0$ wtw. w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie.

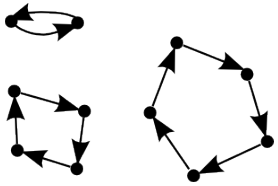
Wyznacznik — interpretacja

$$detT_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

- każdemu składnikowi sumy odpowiada wybór n krawędzi z grafu
- każdą krawędź można przyporządkować do wierzchołka (skierować)
- każdy wierzchołek ma stopień wejściowy i wyjściowy 1
- zatem taki wybór krawędzi tworzy *pokrycie cyklowe* grafu

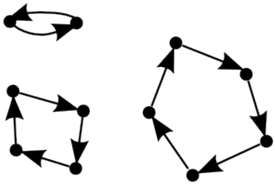
Pokrycie cyklowe a skojarzenie

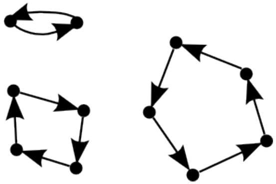
1. jeśli w grafie istnieje doskonałe skojarzenie, to w pewnym pokryciu cyklowym wszystkie cykle są parzystej długości
2. jeśli w grafie nie istnieje doskonałe skojarzenie, to w każdym pokryciu cyklowym istnieje cykl nieparzystej długości



$$detT_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\rightarrow\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

Kluczowy fakt:
W powyższej sumie, składniki odpowiadające pokryciom cyklowym, w których pewien cykl ma nieparzystą długość, "zjadają się"





$$detT_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

1. dla każdego pokrycia z cyklem nieparzystej długości istnieje pokrycie, w którym ten cykl jest skierowany w przeciwnym kierunku
2. niech odpowiadające im iloczyny $\prod_{i=1}^{n} t_{i,\sigma(i)}$ to C i C'
3. czym się od siebie różnią C i C'?
4. składają się z takich samych krawędzi, zatem w C i C' są te same zmienne
5. zmienne odpowiadające krawędziom na cyklu brane są z przeciwnymi znakami
6. cykl ma nieparzystą długość
7. czyli $C = -C'$

Pozostaje pokazać, że znaki permutacji odpowiadających C i C' są przeciwne

1. permutacje te wyglądają tak samo jak odpowiadające im pokrycia cyklowe
2. zatem ich rozkład na cykle jest bardzo podobny — różną się jedynie zwrotem jednego cyklu
3. znak permutacji jest funkcją długości cykli
4. zatem znaki tych permutacji są równe

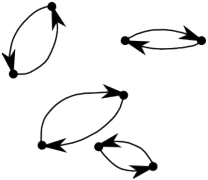
Czyli, dla grafu, w którym nie ma doskonałego skojarzenia, $det T_G \equiv 0$.

Dowód w drugą stronę

Jeśli w grafie istnieje doskonałe skojarzenie, to odpowiadające mu składniki sumy:

$$detT_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma)\prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

są iloczynami kwadratów zmiennych.



To zakończyło dowód.

Twierdzenie (Tutte, 1947)

$detT_G \neq 0$ wtw. w grafie G istnieje doskonałe skojarzenie.

Przy okazji udowodniliśmy twierdzenie Jacobiego.

Obliczanie wyznacznika

Jak policzyć $det T_G$?

- obliczenie przy użyciu eliminacji Gaussa daje algorytm wykładniczy
- nie trzeba obliczać tego wyznacznika, wystarczy sprawdzić czy jest on $\equiv 0$
- można wylosować wartości $x_{i,j}$ i sprawdzić wartość wyznacznika
- wyznacznik to wielomian wielu zmiennych stopnia n
- w przypadku wielomianów jednej zmiennej, taki wielomian ma co najwyżej n zer
- okazuje się, że dla wielomianów wielu zmiennych jest podobnie

Obliczanie wyznacznika c.d.

Fakt

Niech p będzie liczbą pierwszą oraz W wielomianem m zmiennych stopnia $n > 0$. Wówczas liczba takich $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{Z}_p^m$, że $W(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$ nie przekracza $\frac{n}{p} p^m$.

Dowód: łatwa indukcja.

Doskonałe skojarzenie vs najliczniejsze skojarzenie

Za pomocą dowolnego algorytmu sprawdzania, czy w grafie istnieje doskonałe skojarzenie da się obliczyć rozmiar najliczniejszego skojarzenia. Zachodzi prosty fakt:

Fakt

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, zaś G_{+k} grafem G, do którego dołożono k wierzchołków połączonych z każdym wierzchołkiem G.
Wówczas, w G_{+k} istnieje doskonałe skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy w G istnieje skojarzenie liczności $\frac{n-k}{2}$.

Wyznaczanie najliczniejszego skojarzenia

- kolejno usuwamy krawędzie z grafu
- po każdym usunięciu sprawdzamy rozmiar najliczniejszego skojarzenia
- jeśli rozmiar najliczniejszego skojarzenia się zmniejszył, to znaczy, że usunięta krawędź należy do każdego najliczniejszego skojarzenia w tym grafie
- w takim przypadku należy ją przywrócić
- potrzeba więc $O(m \, logn)$ wywołań procedury sprawdzającej istnieje doskonałego skojarzenia

Zliczanie doskonałych skojarzeń

- dla grafów dwudzielnych równoznaczne z obliczeniem permanentu:

$$perm\ A = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\}\\ \sigma - permutacja}} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

Zliczanie doskonałych skojarzeń

- dla grafów dwudzielnych równoznaczne z obliczeniem permanentu:

$$perm\ A = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

- dla niektórych grafów istnieje wzór, np. dla szachownicy $n \times m$:

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(4cos^2\frac{\Pi j}{m+1} + 4cos^2\frac{\Pi k}{n+1})^{\frac{1}{4}}$$

Zliczanie doskonałych skojarzeń

- dla grafów dwudzielnych równoznaczne z obliczeniem permanentu:

$$perm\ A = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\}\\ \sigma-permutacja}} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

- dla niektórych grafów istnieje wzór, np. dla szachownicy $n \times m$:

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(4cos^2\frac{\Pi j}{m+1}+4cos^2\frac{\Pi k}{n+1})^{\frac{1}{4}}$$

- dla grafów dowolnych problem klasy $\#P$

Zliczanie doskonałych skojarzeń

- dla grafów dwudzielnych równoznaczne z obliczeniem permanentu:

$$perm\ A = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\}\\ \sigma-permutacja}} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

- dla niektórych grafów istnieje wzór, np. dla szachownicy $n \times m$:

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(4cos^2\frac{\Pi j}{m+1} + 4cos^2\frac{\Pi k}{n+1})^{\frac{1}{4}}$$

- dla grafów dowolnych problem klasy $\#P$
- dla pewnej klasy grafów (zawierającej grafy planarne) problem rozwiązywalny wielomianowo

Zliczanie doskonałych skojarzeń w grafach planarnych

Idea: podstawić takie wartości, by obliczanie wyznacznika zliczało pokrycia cyklowe.

$$det T_G = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} t_{i\sigma(i)}$$

Okaże się, że liczba doskonałych skojarzeń to: $\sqrt{det T_G}$ dla pewnego podstawienia pod zmienne w macierzy

Szukane podstawienie

Podstawmy pod zmienne w macierzy Tuttego wartości 1 lub -1: taką macierz można interpretować jako macierz grafu skierowanego. Niech otrzymana macierz to A.

Definicje:

1. *wagą cyklu* $(i_1, i_2, i_3, ..., i_k)$ nazwiemy iloczyn $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} ... a_{i_k i_1}$
2. *wagą pokrycia cyklowego* jest iloczyn wag cykli
3. skierowanie krawędzi nazwiemy *dopuszczalnym* jeśli w dowolnym pokryciu cyklowym cyklami parzystej długości (PCCPD), każdy cykl ma wagę -1

Twierdzenie

Twierdzenie

Niech macierz A reprezentuje dopuszczalne skierowanie krawędzi grafu G oraz niech S oznacza liczbę doskonałych skojarzeń w G. Wówczas:

$$S^2 = det\ A$$

Dowód

- S^2 oznacza liczbę par doskonałych skojarzeń w G
- suma dwóch doskonałych skojarzeń tworzy PCCPD
- każde takie pokrycie cyklowe δ da się uzyskać $2^{v(\delta)}$ razy, gdzie $v(\delta)$ oznacza liczbę cykli o długości większej od 2
- zatem
$$S^2 = \sum_{\delta - PCCPD} 2^{v(\delta)}$$

Dowód c.d.

$$detA = \sum_{\substack{\sigma:\{1..n\}\to\{1..n\} \\ \sigma - permutacja}} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

- każdy składnik tej sumy odpowiada pewnemu PCCPD
- skierowanie krawędzi jest dopuszczalne, zatem każdy cykl ma wagę -1
- $sgn(\sigma)$ jest iloczynem tylu czynników -1, ile jest cykli w σ
- stąd, każdy składnik tej sumy to 0 lub 1
- dodatkowo, każde pokrycie policzymy $2^{v(\delta)}$ razy

Koniec dowodu

Wiemy zatem, że

$$det\ A = \sum_{\delta - PCCPD} 2^{v(\delta)} = S^2$$

co kończy dowód.

Koniec dowodu

Wiemy zatem, że

$$det\ A = \sum_{\delta - PCCPD} 2^{v(\delta)} = S^2$$

co kończy dowód.
Pozostaje pokazać, że graf planarny posiada dopuszczalne skierowanie.

W grafie planarnym skierowanie jest dopuszczalne wtedy i tylko wtedy, gdy w dowolnym PCCPD, nieparzysta liczba krawędzi jest skierowana zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (ZZKRWZ).

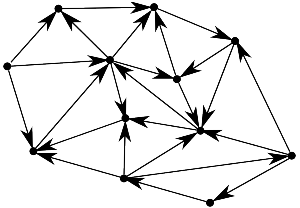
- wystarczy udowodnić dla grafów planarnych, w których każda ściana (poza zewnętrzną) jest trójkątna
- da się tak skierować krawędzie, że każdy cykl otaczający ścianę wewnętrzną ma nieparzyście wiele krawędzi skierowanych ZZKRWZ
- dowód: prosta indukcja ze względu na liczbie krawędzi, w każdym kroku usuwamy krawędź zewnętrzną
- okazuje się, że w tak zdefiniowane skierowanie jest dopuszczalne

Wzór Eulera

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem planarnym oraz niech f oznacza liczbę ścian tego grafu. Wówczas $|V| + f - |E| = 2$.

Rozpatrzmy jeden cykl z pokrycia cyklowego cyklami parzystej długości.

$2n$ — długość cyklu
$2k$ — liczba wierzchołków w jego wnętrzu
m — liczba krawędzi w jego wnętrzu



Obliczenia

Przy tych oznaczeniach możemy wyliczyć:

$f = \frac{2m+2n}{3} + 1$

Podstawiając do wzoru Eulera:

$2n + 2k + \frac{2m+2n}{3} + 1 - m - 2n = 2$

Obliczenia

Przy tych oznaczeniach możemy wyliczyć:

$f = \frac{2m+2n}{3} + 1$

Podstawiając do wzoru Eulera:

$2n + 2k + \frac{2m+2n}{3} + 1 - m - 2n = 2$

$m = 6k - 3 + 2n$

$f - 1 = \frac{12k-6+4n+2n}{3} = 4k - 2 + 2n$

Aby policzyć liczbę krawędzi na cyklu skierowanych ZZKRWZ należy:

- zsumować liczby krawędzi na wszystkich cyklach otaczających ściany
- odjąć od otrzymanej sumy krawędzie, które nie leżą na zewnętrznym cyklu
- pierwsza wartość jest sumą $f-1$ wartości nieparzystych, zatem jest parzysta
- druga wartość jest równa dokłanie m
- zatem ich różnica jest nieparzysta

$\square$

Bibliografia

- Matching is as easy as matrix Inversion, K. Mulmuley, Umesh V. Vazirani, Vijay V. Vazirani, *Combinatorica 7, 1987*
- Probabilistic algorithms for verification of polynomial identities, *Journal of the ACM, 1980*
- Counting complete matchings without using Pfaffians, N. G. de Bruijn *1980*