

Kernel $4k^2$ dla Feedback Vertex Set

Michał Pachucki

December 17, 2009

Plan prezentacji

Wprowadzenie

- Feedback Vertex Set

- Fixed problem tractability

Tw. Gallai

- A-ścieżki

- Przypomnienie tw. Berge

- Dowód

Stokrotki

- Definicja

- Znajdowanie stokrotek

Algorytmy na podstawie tw. Halla

- Algorytm 1

- Algorytm 2

Znajdowanie kernela $4k^2$

- Proste reguły redukcyjne

- Trudna reguła redukcyjna

Dowód ograniczenia rozmiaru

Bibliografia

Wprowadzenie do Feedback Vertex Set

Dany łączy graf G oraz liczba k , pytamy czy da się, usuwając maksymalnie k wierzchołków, rozcyklić graf. Graf G może zawierać pętle oraz wielokrotne krawędzie.

Przypomnienie fixed problem tractability

Definicja FPT: Problem L należy do FPT wtw gdy jest parametryzowany parametrem k i istnieje algorytm rozwiązujący ten problem w czasie $f(k)n^{O(1)}$.

Zazwyczaj chcemy tak przekształcić problem aby zmniejszyć jego rozmiar do $k^{O(1)}$ i następnie użyć dowolne rozwiązanie wykładnicze. Zmniejszony problem nazywamy kernelem.

Definicja A -ścieżek

Dla danego grafu $G = (V, E)$ i zbioru $A \subset V$ A -ścieżkę definiujemy jako ścieżkę, której pierwszy i ostatni wierzchołek należy do A i żaden wierzchołek pomiędzy nie należy do A .

Przypomnienie tw. Berge

Formuła Berge'a mówi, że rozmiar maksymalnego skojarzenia w grafie $G = (V, E)$ wynosi $\min_{X \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| - \text{occ}(V - X) + |X|)$, gdzie $\text{occ}(Y)$ to ilość spójnych składowych nieparzystego rozmiaru w Y . Proste przekształcenia pozwalają uzyskać równoważną formułę $\min_{X \subseteq V} |X| + \sum_{c \in C} \lfloor \frac{|c|}{2} \rfloor$.

Dla zadanego grafu $G = (V, E)$ niech $A \subset V$. Maksymalna liczba wierzchołkowo niezależnych A -ścieżek jest równa minimum $|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lfloor \frac{|A \cap C|}{2} \rfloor$, gdzie $X \subset V$ i $\mathcal{C}$ to zbiór spójnych składowych $G' = (V \setminus X, E)$.

Dowód tw. Gallai

Sprowadzamy problem do maksymalnego skojarzenia.

Tworzymy graf $G' = (V', E')$ z grafu $G = (V, E)$.

- ▶ Dla każdego $v \in V \setminus A$ do V' należy wierzchołek v oraz jego kopia v' połączona z v wraz z wszystkimi sąsiadami v .
- ▶ Każdy $v \in A$ należy do V' .

Dowód tw. Gallai

W grafie G' rozmiar maksymalnego skojarzenia to $|V \setminus A| + p$, gdzie p to maksymalna ilość wierzchołkowo niezależnych A -ścieżek w G .

- ▶ Zależność pomiędzy A -ścieżką w G a skojarzeniem w G' .
- ▶ Przekształcamy na skojarzenie równoważne usuwając 'cykle' niezwiązane z A i 'ścieżki'. Pozostaje p A -ścieżek.
- ▶ W drugą stronę, jeżeli mamy p A -ścieżek, to tworzymy maksymalne skojarzenie o rozmiarze $|V \setminus A|$.

Dowód tw. Gallai

Podstawiając wynik z poprzedniego slajdu do tw. Berge dla grafu G' otrzymujemy:

$$|V \setminus A| + p = |X'| + \sum_{c \in C'} \lfloor \frac{|c|}{2} \rfloor$$
$$p = -|V \setminus A| + |X'| + \sum_{c \in C'} \lfloor \frac{|c|}{2} \rfloor$$

Dla dowolnego v i jego kopii v' w G' albo oba v i v' należą do X' albo oba nienależą do X' .

Gdyby tylko jeden z nich należał do X' to wyjmując go z X' nie możemy zmienić wartości prawej strony.

Dowód tw. Gallai

Zauważmy, że

$$-|V \setminus A| + |X'| + \sum_{c' \in C'} \lfloor \frac{|c'|}{2} \rfloor = |X| + \sum_{c \in C} \lfloor \frac{|A \cap c|}{2} \rfloor$$

Gdzie $|X| = \{v \in V : v, v' \in X'\}$

Co kończy dowód, że $p = \min_{X \subseteq V} |X| + \sum_{c \in C} \lfloor \frac{|A \cap c|}{2} \rfloor$

Definicja stokrotki

W danym grafie $G = (V, E)$ $v \in V$ tworzy stokrotkę rozmiaru k jeżeli istnieje k cykli, których parami jedyny wspólny wierzchołek to v .

Znajdowanie stokrotek

W grafie $G = (V, E)$ dla danego wierzchołka $v \in V$ można w czasie wielomianowym obliczyć jak duża stokrotek tworzy.

Niech $G'' = (V \setminus \{v\}, E'')$ i A to zbiór wierzchołków będących sąsiadami v w G .

Korzystamy z przekształcenia G'' w G' z dowodu tw. Gallai, znajdujemy maksymalne skojarzenie w G' w czasie wielomianowym (alg. Edmondsa). Dodatkowo dostaniemy również zbiór X certyfikujący równość z tw. Berge'a.

Algorytm 1

Algorytm 1 znajduje w czasie wielomianowym w grafie dwudzielnym $G(X, Y, E)$ taki $Z \subset X$, że $N(Z) < 2|Z|$, gdzie $N(Z)$ to zbiór wszystkich sąsiadów wierzchołków z Z . Jeżeli taki zbiór Z nie istnieje odpowiada 'brak'.

Stwórz graf G' poprzez stworzenie kopii X' X i znajdź maksymalne skojarzenie w G' . Jeżeli każdy element z $X \cup X'$ jest skojarzony to zbiór Z nie istnieje.

Znajdowanie Z z maksymalnego skojarzenia

Do Z' dodajemy wszystkie nieskojarzone elementy z $X \cup X'$ i następnie dopóki Z' się zmienia do Z' dodaj skojarzone z $N(Z')$ wierzchołki.

Po zakończeniu $Z = \{v : v \in Z' \text{ albo istnieje } v' \text{ t.ż. } v' \text{ jest kopia } v \text{ i } v' \in Z'\}$. $|Z| \geq \frac{|Z'|}{2}$, więc $|N(Z)| < 2|Z|$.

Algorytm 2

Algorytm 2 dla grafu dwudzielnego $G = (X, Y, E)$, spełniającego warunki $|Y| > 2|X|$ i każdy wierzchołek z Y ma sąsiada, znajduje takie X' i Y' t.ż. $N(Y') = X'$ oraz dla każdego $L \subset X'$ L ma przynajmniej $2|L|$ sąsiadów.

Iteracyjnie przekształcamy graf G : znajdujemy zbiór Z z algorytmu 1 i usuwamy go wraz z jego sąsiadami. Kończymy kiedy algorytm 1 nie znajduje zbioru Z .

Proste reguły redukcyjne

Zmieniamy instancję (G, k) na (G', k') taką, że albo $|G| > |G'|$ albo $k > k'$.

- ▶ Usuwanie pętli: Jeżeli wierzchołek v jest połączony sam ze sobą zredukuj problem do $(G \setminus v, k - 1)$
- ▶ Usuwanie wierzchołków małego stopnia: Jeżeli wierzchołek v ma stopień 0, 1 to zredukuj problem do $(G \setminus v, k)$
- ▶ Usuwanie wierzchołków 2 stopnia: Jeżeli wierzchołek jest stopnia 2 to usuń go i połącz jego sąsiadów.
- ▶ Usuwanie multikrawędzi : Jeżeli krawędź występuje więcej niż 2 razy usuń tyle aby zostały 2.
- ▶ Usuwanie stokrotek: Jeżeli istnieje v tworzący stokrotkę rozmiaru k_1 i k_2 cykli parami rozłącznych i rozłącznych od stokrotki i $k_1 + k_2 > k$ to zredukuj problem do $(G \setminus v, k - 1)$

Trudna reguła redukcyjna

Niech $X \subset V$, $x \in V \setminus X$ i C podzbiór spójnych składowych $G \setminus (V \cup x)$ takie, że:

- ▶ Istnieje dokładnie jedna krawędź pomiędzy x a każdą spójną składową z C .
- ▶ Każda spójna składowa z C indukuje drzewo.
- ▶ Dla każdego $Z \subset X$ liczba spójnych składowych z C mających sąsiada w Z wynosi co najmniej $2|Z|$.

Wtedy można połączyć x z wszystkimi wierzchołkami z X podwójną krawędzią oraz usuwając krawędzie pomiędzy x a C .

Trudna reguła redukcyjna - dowód

Tw. Trudna reguła jest bezpieczna.

Założmy, że nie.

Jeżeli w zmienionym grafie G' znajdziemy S' FVS, to

- ▶ w $G \setminus S'$ istnieje cykl
- ▶ x należy do tego cyklu i nie należy do S' . To oznacza, że $X \subset S'$
- ▶ Każda krawędź między x a C to most, czyli te krawędzie nie należą do cyklu.
- ▶ Czyli każda krawędź cyklu należy do $G' \setminus S'$

Trudna reguła redukcyjna - dowód

Niech S to FVS dla G , pokaże, że istnieje FVS S' w G' i $|S'| \leq |S|$.
Jeżeli S zawiera x to koniec.

Niech $Y = X \setminus S$ i Z to zbiór wierzchołków S należących do jakiejś spójnej składowej z C . Wtedy $S' = (S \cup Y) \setminus Z$ i $|Z| \geq |Y|$.

Dowód ograniczenia rozmiaru

Pokażę, że dla każdego $G = (V, E)$, jeżeli $|V| > 4k^2$ można użyć jakiejś reguły redukcyjnej. Używanie prostych reguł jest mechaniczne, więc założmy, że G to spójny graf z wierzchołkami stopnia min. 3, bez pętli i z maksymalnie podwójnymi krawędziami. $G \setminus S$ to drzewo, więc istnieje więcej niż $4k^2 - k$ krawędzi pomiędzy S a $G \setminus S$.

Weźmy z S wierzchołek x o stopniu $> 4k$.

Dowód ograniczenia rozmiaru

Znajdujemy stokrotkę opartą na x i zbiór X . Stopień stokrotki to $p = |X| + \sum_{c \in C} \lfloor \frac{|A \cap c|}{2} \rfloor$.

- ▶ Niech e' to ilość krawędzi pomiędzy spójnymi składowymi $G \setminus X$ połączonych z x więcej niż jedną krawędzią. Wtedy $|X| + e'/3 \leq p \leq k$
- ▶ Istnieje k_1 spójnych połączonych jedną krawędzią, takich, że zawierają cykl
- ▶ Istnieje k_2 elementów z X połączonych podwójnymi krawędziami do x . $k_1 + k_2 \leq k$.
- ▶ Czyli ilość c drzew podłączonych jedną krawędzią do x to przynajmniej $4k - |X| - e' - k$.

Skoro $3k \geq 3|X| + e'$ to $c \geq 2|X|$ i można zaaplikować trudną regułę.

Bibliografia

- ▶ A $4k^2$ kernel for feedback vertex set - Stephan Thomasse.
- ▶ A cubic kernel for feedback vertex set - H.L. Bodlaender.
- ▶ Disjoint A-paths in digraphs - M. Kriesell.
- ▶ A short proof of Mader's S-paths theorem - A. Schijver.