Drzewa Gomory-Hu

Jakub Łącki

14 października 2009

Podstawowe pojęcia i fakty

Niech $G = (V, E, c)$ będzie grafem nieskierowanym z funkcją przepustowości. Przez f_{ij} oznaczamy maksymalny przepływ między wierzchołkami i oraz j.

Definicja (przekrój)

Przekrojem nazywamy dowolny podzbiór wierzchołków grafu G. Wagę przekroju C określamy jako $\sum_{e_1 e_2 \in E, e_1 \in C, e_2 \notin C} c(e_1, e_2)$

Podstawowe pojęcia i fakty

Niech $G = (V, E, c)$ będzie grafem nieskierowanym z funkcją przepustowości. Przez f_{ij} oznaczamy maksymalny przepływ między wierzchołkami i oraz j.

Definicja (przekrój)

Przekrojem nazywamy dowolny podzbiór wierzchołków grafu G. Wagę przekroju C określamy jako $\sum_{e_1 e_2 \in E, e_1 \in C, e_2 \notin C} c(e_1, e_2)$

Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju

Niech $G = (V, E, c)$ będzie grafem nieskierowanym z funkcją przepustowości. Wartość maksymalnego przepływu z s do t jest równa minimalnej wadze przekroju rozdzielającego s od t.

Drzewo Gomory-Hu

Drzewo Gomory-Hu

Drzewem Gomory-Hu dla grafu $G = (V, E, c)$ nazywamy takie ważone drzewo $T = (V, F, w)$, że po usunięciu krawędzi $e_1 e_2 \in F$ powstałe spójne składowe wyznaczają minimalny przekrój rozdzielający e_1 i e_2, zaś wagą tego przekroju jest $w(e_1 e_2)$.

Drzewo Gomory-Hu

Drzewo Gomory-Hu

Drzewem Gomory-Hu dla grafu $G = (V, E, c)$ nazywamy takie ważone drzewo $T = (V, F, w)$, że po usunięciu krawędzi $e_1 e_2 \in F$ powstałe spójne składowe wyznaczają minimalny przekrój rozdzielający e_1 i e_2, zaś wagą tego przekroju jest $w(e_1 e_2)$.

Twierdzenie

Niech $T = (V, F, w)$ będzie drzewem Gomory-Hu dla grafu $G = (V, E, c)$ oraz niech uv będzie krawędzią o minimalnej wadze na ścieżce od s do t w drzewie T. Oznaczmy przez K przekrój grafu wyznaczony prez spójne składowe drzewa T po usunięciu krawędzi uv. Wtedy K jest minimalnm przekrojem rozdzielającym u i v.

Chcemy pokazać, że:

$$f_{st} = w(uv)$$

Korzystamy z nierówności trójkąta dla przepływu. Dla $a \neq b$ oraz $c \neq a, c \neq b$:

$$f_{ab} \geq min\{f_{ac}, f_{cb}\}$$

Z nierówności tej otrzymujemy:

$$f_{st} \geq w(uv)$$

Z drugiej strony, K to przekrój grafu, który rozdziela s i t, zatem

$$f_{st} \leq w(uv)$$

Lemat o zawieraniu przekrojów

Niech U będzie minimalnym przekrojem rozdzielającym s i t w grafie G oraz niech $u, v \in U, u \neq v$. Wtedy istnieje minimalny przekrój rozdzielający u i v zawarty w U.

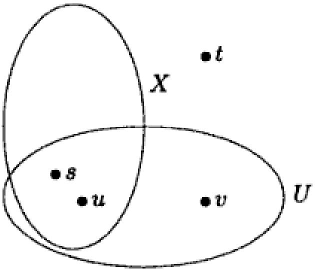
Stwierdzenie

Niech A i B będą przekrojami w grafie G. Wtedy $c(A) + c(B) \geq c(A \cap B) + c(A \cup B)$.

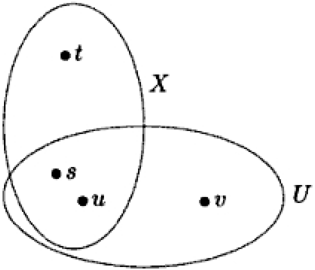
Dowód: wystarczy narysować.

Dowód lematu o zawieraniu przekrojów

Niech X to dowolny spośród minimalnych przekrojów rozdzielających u i v. Zachodzi jeden z dwóch przypadków.



$t \notin X$



$t \in X$

Dowód lematu o zawieraniu przekrojów (2)

Przypadek I, $t \notin X$
Skoro

$$c(X) + c(U) \geq c(X \cap U) + c(X \cup U)(\text{ze stwierdzenia})$$

oraz

$$c(X \cup U) \geq c(U)(\text{z minimalności U}),$$

to

$$c(X) + c(U) \geq c(X \cap U) + c(X \cup U) \geq c(X \cap U) + c(U),$$

czyli

$$c(X) \geq c(X \cap U)$$

Dowód lematu o zawieraniu przekrojów (3)

Przypadek II, $t \in X$
Stosując stwierdzenie dla U oraz $V \setminus X$

$$c(U) + c(X) \geq c(X \setminus U) + c(U \setminus X)$$

oraz

$$c(X \setminus U) \geq c(U)(\text{z minimalności U}),$$

to

$$c(U) + c(X) \geq c(X \setminus U) + c(U \setminus X) \geq c(U) + c(U \setminus X)$$

czyli

$$c(X) \geq c(U \setminus X)$$

Budowa drzewa — algorytm

- Zaczynamy od $T = (V', \emptyset, c)$, gdzie $V' = \{V\}$,
- w każdym kroku dzielimy wierzchołek z V', mający co najmniej 2 elementy, na 2 mniejsze wierzchołki,
- algorytm kończy się, gdy V' składa się z $|V|$ jednoelementowych wierzchołków.

Jeden krok algorytmu:

1. Niech v to taki wierzchołek w drzewie T, że $s, t \in v, s \neq t$. Ukorzeniamy T w v.
2. Na podstawie grafu G budujemy graf G' poprzez zwinięcie wierzchołków z każdego poddrzewa v.
3. Znajdujemy minimalny przekrój rozdzielający s od t w G' (W).
4. Rozbijamy v na $v \cap W$ i $v \setminus W$, łączymy te wierzchołki krawędzią i podpinamy do nich odpowiednio drzewa zawarte w W i te spoza W

Dowód poprawności

Drzewo Gomory-Hu

Drzewem Gomory-Hu dla grafu $G = (V, E, c)$ nazywamy takie ważone drzewo $T = (V, F, w)$, że po usunięciu krawędzi $e_1 e_2 \in F$ powstałe spójne składowe wyznaczają minimalny przekrój rozdzielający e_1 i e_2, zaś wagą tego przekroju jest $w(e_1 e_2)$.

1. Z lematu o zawieraniu przekrojów, możemy rozpatrywać maksymalny przepływ w grafie ze zwiniętymi zbiorami wierzchołków.
2. Aby pokazać, że drzewo jest skonstruowane poprawnie, udowadniamy niezmiennik: drzewo T jest drzewem Gomory-Hu, dla grafu G, w którym zwinięto wierzchołki zawarte w wierzchołkach T.

Problemy otwarte

Opisana metoda daje algorytm działający w czasie n-krotnego uruchomienia algorytmu znajdowania maksymalnego przepływu.

- Hariharan, Kavitha oraz Panigrahi: randomizowany algorytm konstrukcji drzewa Gomory-Hu dla grafu bez wag w czasie $O(nm \times polylog(n))$
- Czy da się uzyskać taki czas dla grafów z dowolnymi wagami?
- Czy istnieje algorytm deterministyczny?

Bibliografia

- A. Schrijver, Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency, Volume 1 *Springer, 2008*
- R. E. Gomory, T. C. Hu, Multi-terminal network flows, *SIAM Journal 9, 1961*
- M. Kao Encyclopedia of Algorithms *Springer, 2008*