Problem skoczka szachowego i inne cykle Hamiltona na szachownicy n x n

Adam Iwanicki

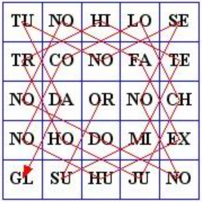
Uniwersytet Warszawski

15 marca 2007

Agenda

Historia

- Problem znany był już od bardzo dawna, jako łamigłówka logiczna.
- Był też stosowany jako szyfr.

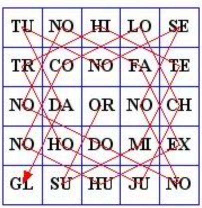


TU	NO	HI	LO	SE
TR	CO	NO	FA	TE
NO	DA	OR	NO	CH
NO	HO	DO	MI	EX
GL	SU	HU	JU	NO

- Formalne badania nad problemem skoczka rozpoczęły się od Eulera, który w 1759 roku rozważał go na szachownicy 8*x*8.

Historia

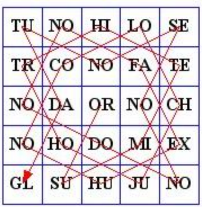
- Problem znany był już od bardzo dawna, jako łamigłówka logiczna.
- Był też stosowany jako szyfr.



- Formalne badania nad problemem skoczka rozpoczęły się od Eulera, który w 1759 roku rozważał go na szachownicy 8x8.

Historia

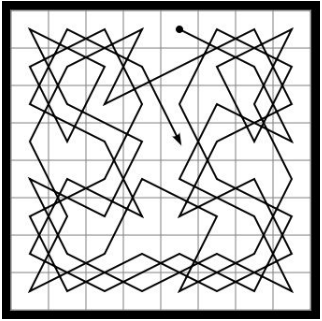
- Problem znany był już od bardzo dawna, jako łamigłówka logiczna.
- Był też stosowany jako szyfr.



- Formalne badania nad problemem skoczka rozpoczęły się od Eulera, który w 1759 roku rozważał go na szachownicy 8*x*8.

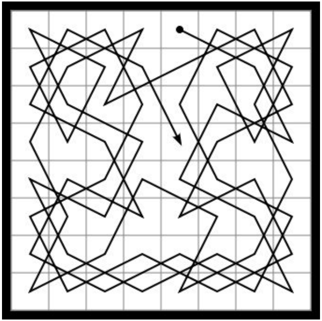
Formalna specyfikacja problemu

- Umieszczamy konika szachowego na planszy.
- Wykonując tylko dozwolone dla konika ruchy chcemy odwiedzić każde pole dokładnie raz.



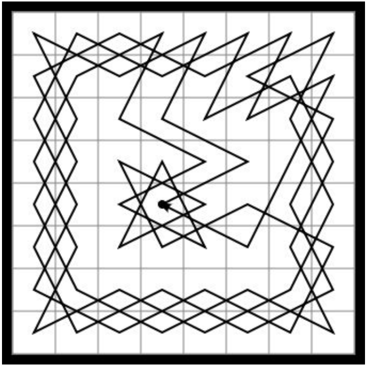
Formalna specyfikacja problemu

- Umieszczamy konika szachowego na planszy.
- Wykonując tylko dozwolone dla konika ruchy chcemy odwiedzić każde pole dokładnie raz.



Rożne wersje I

Ścieżka skoczka powinna tworzyć cykl — zakończyć się na polu, które szachuje pole, z którego rozpoczęliśmy wędrówkę.



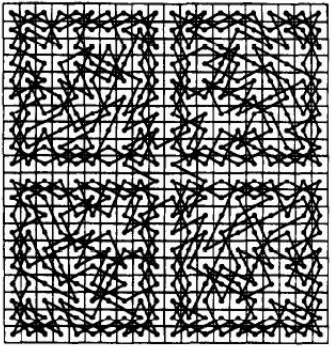
Rożne wersje II

Skoczek powinien rozpocząć i zakończyć scieżke w określonych punktach.

Plansza, po której skacze skoczek, może mieć dowolny rozmiar.

Rożne wersje III

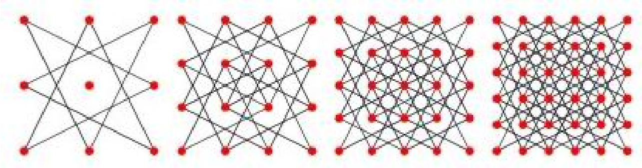
Ścieżka skoczka powinna charakteryzować się różnymi symetriami, lub być niezmiennicza ze względu na obroty.



Przejście na język grafowy

Graf skoczka szachowego

Grafem skoczka szachowego będziemy nazywali graf, którego wierzchołki odpowiadają polom szachownicy, a między dwoma wierzchołkami istnieje krawędź, jeżeli istnieje poprawny ruch skoczka pozwalający przeskoczyć w jedyn ruchu z jednego pola na drugie.
Dla szachownicy $n \times n$ graf ma n^2 wierzchołków i $4(n-2)(n-1)$ krawędzi.



Przejście na język grafowy

Wówczas problem skoczka szachowego sprowadza się do znalezienia cyklu (ścieżki) Hamiltona w grafie skoczka szachowego.

Rozwiązywalność problemu

Twierdzenie Schwenk'a

Dla każdej planszy $m \times n$ (gdzie $m \leq n$) istnieje zamknięta ścieżka konika szachowego (cykl Hamiltona), chyba, że jeden z następujących warunków jest prawdziwy:

- m i n są nieparzyste,
- $m = 1, 2$ lub 4, oraz $n > 1$,
- $m = 3$, a $n = 4, 6$ lub 8.

Dla każdej planszy $m \times n$m gdzie $min(m, n) \geq 5$ istnieje otwarta ścieżka konika szachowego (ścieżka Hamiltona).

Rozwiązywalność problemu

Twierdzenie Schwenk'a

Dla każdej planszy $m \times n$ (gdzie $m \leq n$) istnieje zamknięta ścieżka konika szachowego (cykl Hamiltona), chyba, że jeden z następujących warunków jest prawdziwy:

- m i n są nieparzyste,
- $m = 1, 2$ lub 4, oraz $n > 1$,
- $m = 3$, a $n = 4, 6$ lub 8.

Dla każdej planszy $m \times n$m gdzie $min(m, n) \geq 5$ istnieje otwarta ścieżka konika szachowego (ścieżka Hamiltona).

Rozwiązywalność problemu

Twierdzenie Schwenk'a

Dla każdej planszy $m \times n$ (gdzie $m \leq n$) istnieje zamknięta ścieżka konika szachowego (cykl Hamiltona), chyba, że jeden z następujących warunków jest prawdziwy:

- m i n są nieparzyste,
- $m = 1, 2$ lub 4, oraz $n > 1$,
- $m = 3$, a $n = 4, 6$ lub 8.

Dla każdej planszy $m \times n$m gdzie $min(m, n) \geq 5$ istnieje otwarta ścieżka konika szachowego (ścieżka Hamiltona).

Rozwiązywalność problemu

Twierdzenie Schwenk'a

Dla każdej planszy $m \times n$ (gdzie $m \leq n$) istnieje zamknięta ścieżka konika szachowego (cykl Hamiltona), chyba, że jeden z następujących warunków jest prawdziwy:

- m i n są nieparzyste,
- $m = 1, 2$ lub 4, oraz $n > 1$,
- $m = 3$, a $n = 4, 6$ lub 8.

Dla każdej planszy $m \times n$m gdzie $min(m, n) \geq 5$ istnieje otwarta ścieżka konika szachowego (ścieżka Hamiltona).

Rozwiązywalność problemu

Twierdzenie Schwenk'a

Dla każdej planszy $m \times n$ (gdzie $m \leq n$) istnieje zamknięta ścieżka konika szachowego (cykl Hamiltona), chyba, że jeden z następujących warunków jest prawdziwy:

- m i n są nieparzyste,
- $m = 1, 2$ lub 4, oraz $n > 1$,
- $m = 3$, a $n = 4, 6$ lub 8.

Dla każdej planszy $m \times n$m gdzie $min(m, n) \geq 5$ istnieje otwarta ścieżka konika szachowego (ścieżka Hamiltona).

Rozwiązania problemu

- Ogólny problem znajdowania ścieżki lub cyklu Hamiltona jest $NP-$zupełny.
- Dla specjalnego przypadku znajdowania cyklu i ścieżki Hamiltona w grafie konika szachowego istnieje wiele algorytmów, jest wśród nich rozwiązujący problem w czasie liniowym.

Rozwiązania problemu

- Ogólny problem znajdowania ścieżki lub cyklu Hamiltona jest $NP-$zupełny.
- Dla specjalnego przypadku znajdowania cyklu i ścieżki Hamiltona w grafie konika szachowego istnieje wiele algorytmów, jest wśród nich rozwiązujący problem w czasie liniowym.

Backtracking

Algorytm dokonuje zachłannych wyborów, gdy nie ma możliwości wykonania kolejnego kroku, nawraca i zmienia wcześniej podjęte decyzje. Złożoność tego algorytmu jest wykładnicza.

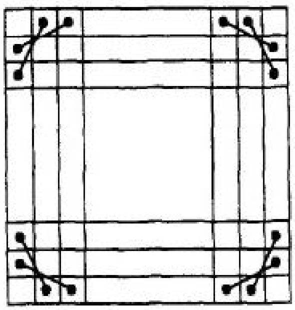
Algorytm losowego chodzenia

Przypisuje się go Eulerowi. Chodzimy po grafie tak długo jak się da, wybierając losowo kolejne pole. Następnie będziemy starali się „łatać” pozostawione pola — starać łączyć je w ciągi ruchów skoczka i wklejać w dotychczasową wędrówkę.
Nie jest to oczywiście algorytm w pełni poprawny.

Możemy tu zastosować dodatkową heurystykę, która, mówi, że zamiast losowo wybierać kolejne pole, będziemy wybierać te, które ma najmniejszą liczbę ruchów możliwych z niego do wykonania.

Definicje

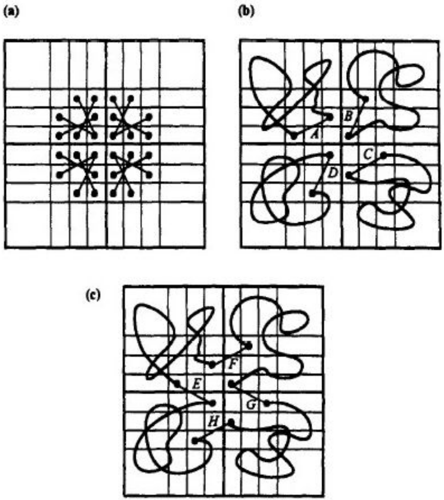
Powiemy, że droga skoczka jest *ustrukturalizowana*, jeśli zawiera następujące fragmenty:



Twierdzenie

Dla każdefo $n \geq 6$ parzystego, istnieje ustrukturalizowana droga konika szachowego na szachownicy $n \times n$ oraz $n \times (n + 2)$.

Dziel i zwyciężaj



Ciekawostki

Kwadraty pół-magiczne

Niektóre ścieżki konika szachowego, jeśli w pola wpiszemy numery kroków, w których je odwiedziliśmy tworzą kwadraty pół-magiczne (sumy elementów w każdym wierszu i kolumnie jest taka sama).

Bibliografia

- O. Kyek, I. Parberry, and I. Wegener,
  Bounds on the Number of Knight's Tours
  Discrete Applied Mathematics, Vol. 74, pp. 171-181, 1997.
- I. Parberry
  An Efficient Algorithm for the Knight's Tour Problem
  Discrete Applied Mathematics, Vol. 73, pp. 251-260, 1997.
- I. Parberry
  Scalability of a Neural Network for the Knight's Tour Problem
  Neurocomputing, Vol. 12, pp. 19-34, 1996.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Knight's_tour
- http://mathworld.wolfram.com/KnightsTour.html